

S2 微分積分学 A

岡林健治

2009.7.7

2009.5.18

I. $f(x)$ は $[0, \infty)$ で定義された単調増加連続関数で次を満たすとする :

- (1) $f(x) = x$ は唯一の解 $\alpha > 0$ を持つ.
- (2) $0 \leq x \leq \alpha$ では $x \leq f(x)$.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, $0 \leq a_1 \leq \alpha$ かつ任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_{n+1} = f(a_n)$ を満たすとする.

- (i) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加であり, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq \alpha$ が成り立つことを示せ.
- (ii) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は α に収束することを示せ.

II. 閉区間 $[0, 1]$ で定義された関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

と定める. $f(x)$ は 0 で連続であることを示せ.

解答

I. (i) $a_n \leq \alpha$ となることを帰納法で示す.

$a_1 \leq \alpha$ は仮定より成り立つ.

$a_k \leq \alpha$ と仮定する.

$f(x)$ は単調増加なので $f(a_k) \leq f(\alpha) = \alpha$

$a_{k+1} = f(a_k)$ より $a_{k+1} \leq \alpha$

数学的帰納法により $\forall k \in \mathbb{N}, a_k \leq \alpha$

$0 \leq x \leq \alpha$ のとき $f(x) \geq x$ なので,

$a_{n+1} = f(a_n) \geq a_n$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加 \square

(ii)(i) より $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増加数列なので、収束する。

$\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ とする。

$f(x)$ は連続なので

$$f(\beta) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \beta$$

$\beta = f(\beta)$ なので $\beta = \alpha$ \square

II. $\epsilon > 0$ が与えられたとする。

$n \in \mathbb{N}$ を $\frac{1}{n} < \epsilon$ を満たすようにとり、 $f = \frac{1}{n}$ とする。

$0 < x < f$

$\frac{1}{m+1} < x \leq \frac{1}{m}$ かつ $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n}$ となる $m \in \mathbb{N}$

$$|f(0) - f(x)| = |0 - \frac{1}{m}| = \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n} < \epsilon$$

よって、 $f(x)$ は 0 で連続 \square

2009.6.1

I. 優級数定理を使って次の級数が収束することを示せ：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}.$$

II. 実数全体 \mathbb{R} で定義された連続関数 $f(x)$ が任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して $f(x+y) = f(x) + f(y)$ を満たすとする。次が成り立つことを示せ：

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(nx) = nf(x)$.

(2) $f(0) = 0$. 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(-x) = -f(x)$.

(3) 任意の $x \in \mathbb{R}$ と $q \in \mathbb{Q}$ に対して $f(qx) = qf(x)$.

(4) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = xf(1)$.

解答

$$\text{I. } \left| \frac{1}{2^n - 1} \right| = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} \leq \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ は収束するので $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ も収束する \square

II.(1) 帰納法で示す.

$n = 1$ のとき $f(x) = f(x)$ より成り立つ.

$n = k$ のとき成り立つと仮定すると

$$f(kx) = kf(x)$$

仮定より

$$\begin{aligned} f(kx + x) &= f(kx) + f(x) \\ f((k + 1)x) &= (k + 1)f(x) \end{aligned}$$

よって $n = k + 1$ のときも成り立つ

数学的帰納法により $f(nx) = nf(x)$ \square

(2) $f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ より $f(0) = 0$

$$f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$$

$$f(0) = 0 \text{ なので } f(-x) = -f(x) \quad \square$$

(1), (2) から, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, f(nx) = nf(x)$

(3) $q = \frac{n}{m}, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ とすると

$$f(m \cdot \frac{1}{m}x) = mf(\frac{x}{m}) \text{ なので}$$

$$f(\frac{x}{m}) = \frac{1}{m}f(x)$$

$$(1), (2) \text{ より } f(n \cdot \frac{x}{m}) = nf(\frac{x}{m}) = \frac{n}{m}f(x) \quad \square$$

(4) (3) より $\forall q \in \mathbb{Q}, f(q) = qf(1)$

有理数の綿密性により $\forall r \in \mathbb{R}$

有理数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $a_n \rightarrow r (n \rightarrow \infty)$ となるものが存在する

$f(x)$ は連続なので

$$f(r) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(1) = rf(1) \quad \square$$

2009.6.15

I. $0 < r < 1$ とし θ を実数とする.

(1) $z = re^{i\theta}$ に対して $z^n + \bar{z}^n = 2r^n \cos(n\theta)$ が成り立つことを示せ.

(2) 次の無限級数の和を求めよ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(n\theta).$$

II. 関数 $\frac{1}{x}$ を次の区間で定義された関数とみなしたとき, 一樣連続かどうかを理由を付けて答えよ.

(1) $(0, 1]$.

(2) $[1, \infty)$.

解答

I. (1) $z = re^{i\theta}$

$$z^n = r^n e^{in\theta}, \bar{z}^n = \bar{z}^n = r^n e^{-in\theta}$$

$$z^n + \bar{z}^n = r^n (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) = 2r^n \cos(n\theta)$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(n\theta) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (z^n + \bar{z}^n) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N (z^n + \bar{z}^n) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} + \frac{1 - \bar{z}^{N+1}}{1 - \bar{z}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - z} + \frac{1}{z - \bar{z}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 - (z + \bar{z})}{(1 - z)(1 - \bar{z})} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 - (z + \bar{z})}{1 - (z + \bar{z}) + |z|^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 - r(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{1 - r(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + r^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 - 2r \cos \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \\ &= \frac{1 - r \cos \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \end{aligned}$$

II. $f(x) = \frac{1}{x}$ とする

(1) $f(x)$ は $(0, 1]$ で一様連続でない.

もし一様連続であるとする,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - y| < \delta \text{ である } \forall x, \forall y \in (0, 1], |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

しかし, $x \in (0, \frac{1}{2}), \delta_1 < \min\{\frac{1}{2}, \delta\}$ とすると

$$x, x + \delta_1 \in (0, 1) \text{ かつ } |x - (x + \delta_1)| = \delta_1 < \delta \text{ だが}$$

$$|f(x) - f(x + \delta_1)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x + \delta_1} \right| = \frac{\delta_1}{x(x + \delta_1)} > \frac{\delta_1}{x}$$

これは x を十分小さく取ることにより, ϵ 以上にできるので矛盾

よって, $f(x)$ は $(0, 1]$ で一様連続でない.

(2) $f(x)$ は $[1, \infty)$ で一様連続

与えられた ϵ に対して $\delta = \epsilon$ と取る

$$x, y \in [1, \infty) \text{ かつ } |x - y| < \delta \text{ ならば}$$

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x - y|}{xy} < |x - y| < \epsilon$$

よって $f(x)$ は $[1, \infty)$ で一様連続.

2009.6.29

I. $f(x)$ は有限閉区間 $[a, b]$ で定義された単調増加関数とする. このとき $f(x)$ は $[a, b]$ で積分可能であることを示せ.

II. $f(x)$ を有限閉区間 $[a, b]$ で定義された実数値連続関数で, 任意の $x \in [a, b]$ に対して $f(x) \geq 0$ を満たすとし,

$$M = \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\} > 0$$

とする. 次の (1), (2), (3) を示すことにより,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f(x)^n dx \right)^{\frac{1}{n}} = M$$

が成り立つことを示せ.

(1)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b f(x)^n dx \leq (b - a)M^n.$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f(x)^n dx \right)^{\frac{1}{n}} \leq M.$$

(2) 任意の $0 < L < M$ に対して次を満たす定数 $C_1 > 0$ が存在する:

$$\forall n \in \mathbb{N}, CL^n \leq \int_a^b f(x)^n dx.$$

ヒント: $f(c) = M$ となる $c \in [a, b]$ を取る. x が c に十分近ければ $f(x) \leq L$.

(3)

$$M \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f(x)^n dx \right)^{\frac{1}{n}}.$$

解答

I. $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ を $[a, b]$ の分割とする.

$$\begin{aligned} S(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \\ s(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \\ S(f, \Delta) - s(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))h(\Delta) \\ &= (f(b) - f(a))h(\Delta) \end{aligned}$$

与えられた $\epsilon > 0$ に対して, $\delta = \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)}$ と取ると,

$h(\Delta) < \delta$ ならば, $S(f, \Delta) - s(f, \Delta) \leq (f(b) - f(a))h(\Delta) < \epsilon$

よって $f(x)$ は積分可能 \square